** - Facilitator

** - Facilitator

Trouver le reste

Introduction

Vous pouvez commencer cette activité avec juste la question : Quel est le reste quand

3^{2001} est divisé par 7? ”. Les élèves peuvent essayer d’utiliser leurs calculatrices - mais la plupart des calculatrices ne pourront pas calculer 3^{2001}. La réponse 954 chiffres de long !! Il est:

5 243 613 755 167 954 828 979 923 857 493 981 711 587 187 462 305 565 553 435 664
035 432 058 798 681 826 467 874 459 409 594 043 333 226 826 852 088 435 829 766
314 105 307 626 525 942 543 242 606 280 915 445 618 737 140 269 931 538 144 588
885 434 961 570 557 957 428 044 513 272 178 232 670 643 501 501 943 441 807 456
777 105 716 207 816 452 294 413 870 938 105 653 077 475 718 233 955 931 993 749
571 031 134 308 987 885 939 219 621 006 883 925 988 857 792 735 239 251 412 587
387 422 273 316 333 312 065 906 438 454 426 044 272 265 990 459 807 203 799 275
098 439 667 269 473 952 525 386 702 435 819 190 926 993 671 431 212 971 081 241
209 719 933 273 595 890 540 220 281 137 133 747 311 608 282 671 064 147 324 069
732 417 549 083 887 453 233 235 393 318 550 535 683 885 805 663 809 444 260 250
347 729 366 521 948 221 255 956 122 138 193 777 640 388 129 452 213 424 943 505
054 039 274 170 717 846 277 739 105 933 248 455 589 414 255 829 810 787 449 232
835 472 799 226 232 852 856 734 803 555 466 806 242 315 240 357 878 079 638 470
575 800 169 895 813 826 209 383 776 296 743 889 809 027 737 938 309 469 031 863
126 328 378 066 808 141 124 600 612 569 413 823 932 072 501 849 303 292 870 244
001 701 140 931 218 464 169 473 646 337 349 975 021 457 162 331 320 003

C’est un casse-tête qui montre que vous pouvez utiliser des exemples de nombres plus petits pour généraliser la réponse à un problème plus compliqué.

Le *reste divisé par 7* est appelé mod 7 en maths. Le mod signifie modulo.

35 mod 7 = 0 car il n'y a pas de reste lorsque vous divisez par 7.

36 mod 7 = 1 car il reste 1 lorsque vous divisez par 7.

Vous pouvez faire l'activité suivante pour discuter de l'idée:

Demandez aux élèves de former des groupes de 7. Combien de personnes reste-t-il? C'est le reste.

Solution

Puissance de 3	Égal à	**Reste dans la division par 7**
3^0	1	1
3^1	3	3
3^2	9	2
3^3	27	6
3^4	81	4
3^5	243	5
3^6	729	1
3^7	2187	3
3^8	6561	2
3^9	19683	6
3^{10}	59049	4
3^{11}	177147	5

Il y a un récurrence qui se répète tous les six chiffres:

Reste dans la division par 7	**Puissance de 3**
1	**0, 6, 12,...**
3	**1, 7, 13,...**
2	**2, 8, 14,...**
6	**3, 9, 15,...**
4	**4, 10, 16, ...**
5	**5, 11, 17, ...**

Il nous suffit donc de trouver la liste dans laquelle 2001 se trouverait.

La première liste 0,6,12 contient tous des multiples de 6   (0 mod 6)

La deuxième liste 1,7,13 contient les multiple de 6 plus 1 (1 mod 6)

La dernière liste 2, 8, 14 contient un multiple de 6 plus 2 (2 mod 6)

etc

Reste dans la division par 7	**Pouvoirs de 3**	**Restant divisé par 6**
1	**0, 6, 12,...**	**0**
3	**1, 7, 13,...**	**1**
2	**2, 8, 14,...**	**2**
6	**3, 9, 15,...**	**3**
4	**4, 10, 16, ...**	**4**
5	**5, 11, 17, ...**	**5**

Nous avons donc besoin de trouver le reste lorsque nous divisons 2001 par 6 (c'est-à-dire le mod 6 de 2001).

2001 mod 6 = 3, donc 2001 apparaîtrait dans la liste 3,9,15, ... donc la réponse est **6.**

Voici une autre façon de penser à ce problème (sans travailler sur les puissance !!) C'est le puissance de l'arithmétique mod:

Puissance de 3	Égal à *(x)*	Il suffit de multiplier la réponse précédente par 3	**Reste dans la division par 7** x mod 7	
3^0	1	1	1	
3^1	~~3~~	3×1=3	3	
3^2	~~9~~	3×3=9=2	2	
3^3	~~27~~	3×2=6	6	
3^4	~~81~~	3×6=18=4	4	
3^5	~~243~~	3×4=12=5	5	
3^6	~~729~~	3×5=15=1	1	
3^7	~~2187~~	3×1=3	3	
3^8	~~6561~~	3×3=9=2	2	
3^9	~~19683~~	3×2=6	6	
3^{10}	~~59049~~	3×6=18=4	4	
3^{11}	~~177147~~	3×4=12=5	5	

On peut alors dire

$$3^{2001} = 3^3 \times 3^{1998}(mod7)$$
$$= 3^3 \times (3^6)^{333}(mod7)$$
$$= 6 \times (1)^{333}(mod7)$$
$$= 6 \times 1(mod7)$$
=6 (mod 7)

Chosen because $3^6 = 1$

Donc, la réponse est 6.

Ou tu peux penser à

$$3^{2001} = 3^{201} = 3^{21} = 3^3 = 6\ (mod7)$$

Extension

Ce problème provient du site Web de Nrich https://nrich.maths.org/373.

Quel est le reste quand 5^{3019} reste dans la division par 7? **La réponse est 5.**